Из отображения St_4 в пространстве $C[K]$ также существует липшицева выборка.

Теорема 5. *Пусть* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C[K]$. *Отображение* $V(x_1,x_2,x_3,x_4)(t) = \min_{i=1}^{4}\{x_i(t) + r_i\}$ *является липшицевой выборкой из отображения* St_4 *при* $r_1 = \rho_1 = \rho_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $r_i = \|x_i - x_1\| - r_1$, $i = 2,3,4$.

Работа поддержана РФФИ (проект № 15-01-08335).

Литература

1. Grothendieck A. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces* L^1 // Canad. J. Math. – 1955. – V. 7. – № 4. – P. 552–561.

2. Lindenstrauss J. *Extension of compact operators* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 48. – P. 1–112.

3. Lima Å. *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 227. – P. 1–62.

4. Беднов Б. Б., Бородин П. А. *Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 4. – С. 3–19.

5. Беднов Б. Б. *Длина минимального заполнения типа звезды* // Матем. сб. – 2016. – Т. 207. – № 8. – С. 31–46.

6. Беднов Б. Б. *О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций* // Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ. – 2011. – № 6. – С. 26–31.

ON THE SET ST(M_4) IN THE SPACE PREDUAL TO L_1

B.B. Bednov

We investigate the set of Steiner points of four element sets in the space predual to L_1.

Keywords: Banach space, Lindenstrauss space, Steiner point, Lipschits selection.

УДК 517.986.62

ВЕЙВЛЕТЫ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Г.С. Бердников[1]

1 *evrointelligent@gmail.com*; Саратовский Государственный Унироситет

В статье обсуждается использование графов для построения вейвлетов на группах Виленкина. Работа является логическим продолжением работ с участием автора по нахождению непереборного алгоритма построения масштабирующей функции, порождающей ортогональный кратномасштабный анализ на группах Виленкина.

Ключевые слова: вейвлеты, группы Виленкина, кратномасштабный анализ, графы, масштабирующая функция, алгоритм.

Пусть $(G_n, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots),\ x_j = \overline{0, p-1},$$

где p – любое простое число. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т.е. $x\dot{+}y=(x_j\dot{+}y_j)(x_j+y_j \bmod p)$. Пусть

$$G_n=\{x\in G:\ x=(\ldots,0_{n-1},x_n,X_{n+1},\ldots)\}, n\in\mathbb{Z}$$

основная цепочка подгрупп, $G_n^{\perp}$ – совокупность аннуляторов, A – оператор сжатия.

Пусть $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$ – множество функций, постоянных на $G_{-N}^{\perp}\zeta$ с носителем в $G_M^{\perp}$. Мы будем искать такие φ с преобразованием Фурье $\hat{\varphi}\in\mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$, которые порождают ортогональный КМА.

Необходимое и достаточное условие масштабирующей функции было найдено в работах [1], [2], однако для нахождения функции требуется перебор всех возможных вариантов. Алгоритм представленный в работах [3], [4] и в данной работе не обладает этим недостатком.

Сначала построим N-валидное дерево T и запишем его вершины как N-компонентные векторы $(\alpha_N,...,\alpha_1)$.

Определение 1. [3] *Пусть N – натуральное число, p - простое. Под N-валидным деревом мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:*

1) Корень и все вершины вплоть до N-го уровня имеют значение равное нулю.

2) Любой путь $(\alpha_k\to\alpha_{k+1}\to\cdots\to\alpha_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве ровно один раз. Здесь $\alpha_i=\overline{0,p-1}$.

Выберем N-валидное дерево T и будем строить по нему масштабирующую функцию.

Схема 1 (Переход от компактной к развернутой форме записи).

По дереву T строим новое дерево $\tilde{T}$ следующим образом.

1) Заменяем последовательность из N нулей, заканчивающуюся корнем дерева, на одну вершину со значением $(0_N,0_{N-1},\ldots,0_1)$. Все вершины $(N+1)$-го уровня дерева T теперь связаны с этой вершиной в дереве $\tilde{T}$. Она является корнем дерева $\tilde{T}$.

2) Без изменения связей переобозначаем остальные вершины. Если в дереве T с вершины α_N начинался путь из N элементов в направлении к корню

$$\alpha_N\to\alpha_{N-1}\to\cdots\to\alpha_1,$$

то в новом дереве $\tilde{T}$ данная вершина будет иметь значение равное N-мерному вектору $(\alpha_N,\alpha_{N-1},\ldots,\alpha_1)$.

В силу условия N-валидности дерева T каждому такому вектору в дереве $\tilde{T}$ соответствует единственная вершина. Также, если мы обозначим $height(T)=H$, $height(\tilde{T})=\tilde{H}$, то очевидно $\tilde{H}=H-N+1$.

Такое дерево будем называть N-валидным деревом в развернутой форме записи.

конец схемы 1

Схема 2 (Построение графа и маски). Теперь соединим часть (или все) вершины дерева $\tilde{T}$ вида $(\alpha_{i_N},...,\alpha_{i_1})$ с вершинами $(\alpha_{i_{N-1}},...,\alpha_{i_0})$ и получим граф Г.
Обозначим

$$\lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},...,\alpha_{-1},\alpha_0}=|m_0(G_{-N}^{\perp}r_{-N}^{\alpha_{-N}}r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}}r_0^{\alpha_0})|^2.$$

Если вершина $(\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1})$ в Г связана с вершиной $(\alpha_{-N+1},\alpha_{-N+2}\ldots,\alpha_{-1},\tilde{\alpha}_0)$ то определим значения маски $m_0(\chi)$ масштабирующей функции следующим образом:

$$\sum_{\tilde{\alpha}_0} \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\dots,\alpha_{-1},\tilde{\alpha}_0} = 1 \text{ и } \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\dots,\alpha_{-1},\alpha_0} = 0 \text{ для всех } \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\}.$$

Выбор конкретных значений произволен, главное, чтобы выполнялись условия, указанные выше.

Дополнительно, положим $m_0(G_{-N}^{\perp}) = 1$.

конец схемы 2

По маске, построенной таким образом, можно восстановить значения масштабирующей функции $\hat{\varphi}$ по формуле $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n})$. Заметим, что произведение на самом деле конечно, так как $m_0(G_{-N}^{\perp}) = 1$.

Таким образом, верна следующая

Теорема 1. [3] *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф* Γ *и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в схемах 1 и 2. Пусть $\tilde{H} = height(\tilde{T})$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathscr{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$, причем $M = \tilde{H} - N$.

Заметим, что данный алгоритм, очевидно, является достаточным условием, но одновременно он же является и необходимым условием ступенчатой ортогональной масштабирующей функции с компактным носителем на группах Виленкина в том смысле, что любая масштабирующая функция из рассматриваемого класса может быть построена по данному алгоритму (см. [5]).

Теперь коснемся вопроса построения вейвлетов по найденной маске $m_0(\chi)$. Вейвлеты ψ^l можно найти по формулам $\hat{\psi}^l(\chi) = m^l(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1})$, $l = \overline{0, p-1}$, где функции m^l называются масками вейвлетов. Очевидно, $m_0 = m^0$, $\psi^0 = \varphi$.

Теорема 2. *Пусть $m^k(\chi)$, $k = \overline{0, p-1}$ – маски, постоянные на смежных классах ${G_{-N}}^{\perp}$ и периодичные с любым периодом $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_\nu^{\alpha_\nu}$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Определим вейвлеты ψ^l равенствами*

$$\hat{\psi}^l(\chi) = m^l(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

где $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ – масштабирующая функция. Система сдвигов $(\psi^l(x \dot{-} h^{(l)}))$, $l = \overline{0, p-1}, h^l \in H_0$ будет ортонормированной тогда и только тогда, если для любых $\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} m^k(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0}) \overline{m^l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0})} = \delta_{k,l}.$$

Достаточность этого условия следует из теоремы 3 в работе [6], доказательство необходимости и достаточности для ступенчатых функций есть результат данной работы. Следуя всему вышеизложенному, алгоритм построения вейвлетов можно сформулировать так:

Алгоритм 1.

1) Построим маску m_0 пользуясь схемами 1,2. Обозначим

$$m^0_{\alpha_{-N}\dots\alpha_0} = m^0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^0), \quad m^l_{\alpha_{-N}\dots\alpha_0} = m^l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0}).$$

Восстановим значения $\hat{\varphi}$, воспользовавшись формулой $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n})$.

2) Для каждого набора $\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1}$ построим матрицу $M(\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1}) \in Mat_{p\times p}(\mathbb{C})$ с элементами $M_{l,\alpha_0}(\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1})$ следующим образом. Первая строка состоит из всех значений

$$m^0_{\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1},0}, m^0_{\alpha_{-N} \dots -1,1}, \dots, m^0_{\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1},p-1},$$

где $\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1}$ фиксированы. Чтобы сделать эту матрицу унитарной, поступим следующим образом.

Если $m^{(\mathbf{0})}_{\alpha_{-N} \dots -1,0} \neq 0$, то присвоим $M_{l,l} = 1$, если $l \neq 0$ и $M_{l,\mathbf{a_{-1}}} = 0$ в противном случае. Если $m^{(\mathbf{0})}_{\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1},0} = 0$, то существует номер j такой, что $m^{(\mathbf{0})}_{\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1},j} \neq 0$. Это ненулевое значение существует по необходимому условию маски m^0 (). В этом случае, присвоим $M_{j,\mathbf{0}} = 1, \quad M_{l,l} = 1$ при $l \neq 0, j$, и $M_{l,\mathbf{a_{-1}}} = 0$ в противном случае. Очевидно, полученная матрица имеет линейно независимые строки.

Заметим, что, на самом деле, любая невырожденная матрица с первой строкой, заполненной значениями $m^0_{\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1},0}, m^0_{\alpha_{-N} \dots -1,1}, \dots, m^0_{\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1},p-1}$ удовлетворяет нашим целям, выше всего лишь указан простейший способ сконструировать такую матрицу.

3) Используя алгоритм ортогонализации Грамма-Шмидта, преобразуем данную матрицу к унитарной.

4) Теперь, для каждого $l = \overline{1, p-1}$ мы находим значения маски m^l из равенств

$$m^l(G^{\perp}_{-N} r^{\alpha_{-N}}_{-N} \dots r^{\alpha_0}_0) = M_{l,\alpha_0}(\alpha_{-N} \dots \alpha_{-1}).$$

После этих операций, маски m^l будут удовлетворять условию теоремы 2.

5) Вейвлеты ψ^l могут быть получены по формуле

$$\hat{\psi}^l(\chi) = m^l(\chi)\hat{\varphi}(\chi \mathscr{A}^{-1})$$

после чего необходимо провести обратное преобразование Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152-а).

Литература

1. Фарков Ю. А. *Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2005. – Т. 69. – № 3. – С. 193–220.

2. Фарков Ю. А. *Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп* // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82. – № 6. – С. 934-952.

3. Бердников Г.С., Лукомский С.Ф., Крусс Ю. *Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина* // Математические заметки. – 2015. – Т. 98. – № 2. – С. 310–313.

4. Бердников Г.С. *Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина* // Изв. Саратовск. университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 377–388.

5. Бердников Г.С. *Графы в кратномасштабном анализе на группах Виленкина.*// Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Том 51. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Двенадцатой межд. Казанской летней науч. школы-конф., 2015. – С. 70—72.

6. Jiang H, Li D, Jin N. *Multiresolution analysis on local fields* // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 294. – P. 523–532.

WAVELETS ON VILENKIN GROUPS

G.S. Berdnikov

Wavelet construction on Vilenkin groups is discussed in the paper. The work is a logical conclusion of author's research in finding an algorithm for constructing a scaling function which generates orthogonal multiresolution analysis on Vilenkin groups. The algorithm doesn't require exhaustive search.
Keywords: wavelets, Vilenkin groups, multiresolution analysis, graphs, scaling function, algorithm.

УДК 517.98

ПАРАНОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В НОРМИРОВАННОЙ АЛГЕБРЕ

А.М. Бикчентаев[1], С.А. Абед[2]

1 *airat.bikchentaev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *samialbarkish@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Для нормированной алгебры $\mathscr{A}$ и $k \in \mathbb{N}$ введены и исследованы $\|\cdot\|$-замкнутые классы

$$\mathscr{P}_k(\mathscr{A}) = \{T \in \mathscr{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathscr{A} \text{ с } \|A\| = 1\}.$$

Показано, что $\mathscr{P}_1(\mathscr{A}) \subset \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Если $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$, то $T^n \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\mathscr{A}$ унитальна, $U, V \in \mathscr{A}$ такие, что $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ и $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, то $UTV \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В частности, если $\mathscr{A}$ унитальная C^*-алгебра и $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, то $UTU^* \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех изометрий $U \in \mathscr{A}$ и $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathscr{A}$ унитальна, тогда 1) если элемент $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$; 2) при $\|I\| = 1$ класс $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ состоит из нормалоидных элементов; 3) если спектр элемента $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ лежит на единичной окружности, то $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathscr{A}$. Если $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то класс $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, C*-алгебра, паранормальный оператор, квазинильпотеный оператор, изометрия, гипонормальный оператор, нормалоидный оператор, нормированная алгебра, унитальная алгебра.

Пусть $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ – *-алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *паранормальным*, если $\|T^2x\|_{\mathscr{H}} \geq \|Tx\|^2_{\mathscr{H}}$ для всех $x \in \mathscr{H}$ с $\|x\|_{\mathscr{H}} = 1$, см. [1]– [3]; *изометрией*, если $T^*T = I$; *гипонормальным*, если $T^*T \geq TT^*$. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра такая, что $\|X^*X\| = \|X\|^2$ для всех $X \in \mathscr{A}$. По теореме Гельфанда–Наймарка любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная алгебра над полем Λ, $\mathscr{A}_1 = \{X \in \mathscr{A} : \|X\| = 1\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что $T \in \mathscr{A}$ *квазинильпотент*, если $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$; *нормалоидный*, если $\|T^n\| = \|T\|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Введем класс

$$\mathscr{P}_k(\mathscr{A}) = \{T \in \mathscr{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathscr{A}_1\}.$$